N 1

$$J = \int \frac{1-3x}{4x^2-1}\,dx$$

Решение

Преобразуем дробь:

$$\frac{1-3x}{4x^2-1} = \frac{1}{4x^2-1} - \frac{3x}{4x^2-1}$$

Интегрируем:

$$J = \int \frac{1-3x}{4x^2-1}\,dx = \int \frac{dx}{4x^2-1} - 3\int \frac{x\,dx}{4x^2-1}$$

В первом интеграле замечаем, что

$$\frac{1}{4x^2-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

Применяем формулу:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| ; \quad a = \frac{1}{2}:$$

$$J_1 = \int \frac{dx}{4x^2-1} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|$$

(Числитель и знаменатель дроби мы умножили на 2)

Во втором интеграле делаем подстановку:

$t = 4x^2 - 1$. Тогда

$dt = (4x^2-1)' dx = (4(x^2)' - (1)')dx = (4 \cdot 2x - 0)dx =$

$= 8x\,dx$. Отсюда $x\,dx = \frac{1}{8} dt$. Подставляем:

$$J_2 = \int \frac{x\,dx}{4x^2-1} = \frac{1}{8} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{8} \ln|t| = \frac{1}{8} \ln|4x^2-1|$$

(Мы использовали формулу: $\int \frac{dt}{t} = \ln|t|$)

Окончательно имеем:

$$J = J_1 - 3J_2 = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| - \frac{3}{8} \ln|4x^2-1| + C$$

<u>Ответ:</u> $J = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| - \frac{3}{8} \ln|4x^2-1| + C$

N2

$$J=\int_{3}^{\sqrt{3}}\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

Решение

Сделаем подстановку $t^2=x^2+1$. Тогда

$(t^2)'dt=(x^2+1)'dx$, или

$2t\,dt=((x^2)'+(1)')dx=(2x+0)\,dx=2x\,dx.$

Отсюда $x\,dx=t\,dt.$

$\sqrt{x^2+1}=\sqrt{t^2}=t$

$x^2=x^2+1-1=t^2-1$

при $x=3$; $t=\sqrt{x^2+1}=\sqrt{3^2+1}=\sqrt{10}$

при $x=\sqrt{3}$; $t=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=\sqrt{3+1}=2$

подставляем:

$$J=\int_{3}^{\sqrt{3}}\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int_{3}^{\sqrt{3}}\frac{x^2\cdot x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int_{\sqrt{10}}^{2}\frac{(t^2-1)\cdot t\,dt}{t}=$$

$$=\int_{\sqrt{10}}^{2}(t^2-1)\,dt=\int_{\sqrt{10}}^{2}t^2\,dt-\int_{\sqrt{10}}^{2}dt=\frac{1}{2+1}\cdot t^{2+1}\Big|_{\sqrt{10}}^{2}-$$

№2 (стр. 2)

$$-t\Big|_{\sqrt{10}}^{2} = \frac{1}{3}t^3\Big|_{\sqrt{10}}^{2} - (2-\sqrt{10}) = \frac{1}{3}\left(2^3 - (\sqrt{10})^3\right) -$$

$$-2+\sqrt{10} = \frac{1}{3}\left(8-\sqrt{10^3}\right) - 2 + \sqrt{10}$$

Но $\sqrt{10^3} = \sqrt{1000} = \sqrt{100\cdot 10} = 10\sqrt{10}$

Окончательно имеем:

$$J = \frac{8}{3} - \frac{10}{3}\sqrt{10} - \frac{2\cdot 3}{3} + \frac{3}{3}\sqrt{10} =$$

$$= \frac{8-6}{3} - \frac{10-3}{3}\sqrt{10} = \frac{2}{3} - \frac{7}{3}\sqrt{10}$$

<u>Ответ:</u> $J = \frac{2}{3} - \frac{7}{3}\sqrt{10} \approx -6,712$

(Мы использовали формулу $\int t^n\,dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1}$)

№3

$$J = \int_1^3 \frac{\ln x}{x^3}\, dx$$

<u>Решение</u>

Интегрируем по частям. Пусть $u = \ln x$. Тогда

$$du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x}\, dx.$$

Пусть $dv = \frac{1}{x^3}\, dx$. Применим формулу:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$ Тогда

$$v = \int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{1}{-3+1} \cdot x^{-3+1} = -\frac{1}{2} x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

Подставляем:

$$J = \int_1^3 \frac{\ln x}{x^3} dx = \int_1^3 u\, dv = u \cdot v \Big|_1^3 - \int_1^3 v\, du =$$

$$= \ln x \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^3 - \int_1^3 \left(-\frac{1}{2x^2}\right) \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{x^2}\Big|_1^3 + \frac{1}{2}\int_1^3 x^{-3} dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln 3}{3^2} - \frac{\ln 1}{1^2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-3+1}\cdot x^{-3+1}\Big|_1^3 = -\frac{\ln 3}{18} - \frac{1}{2\cdot 2}x^{-2}\Big|_1^3 =$$

(Замечаем, что $\ln 1 = 0$)

$$= -\frac{\ln 3}{18} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2}\right) = -\frac{\ln 3}{18} - \frac{1}{4}\left(\frac{1-9}{9}\right) =$$

$$= -\frac{\ln 3}{18} + \frac{8}{4\cdot 9} = \frac{2}{9} - \frac{\ln 3}{18} = \frac{4-\ln 3}{18}$$

Ответ: $I = \dfrac{4-\ln 3}{18} \approx 0{,}1612$

N 4

$yy' = x^5 - x$

Решение

Разделяем переменные:

$y\frac{dy}{dx} = x^5 - x$. Умножим на dx:

$y\,dy = (x^5 - x)\,dx$. Интегрируем:

$\int y\,dy = \int (x^5 - x)\,dx$

Интегрируем, применяя формулу: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$.

$\int y\,dy = \int y^1 dy = \frac{1}{1+1} y^{1+1} = \frac{1}{2} y^2$

$\int (x^5 - x)\,dx = \int x^5 dx - \int x\,dx = \frac{1}{5+1} x^{5+1} - \frac{1}{1+1} \cdot x^{1+1} =$

$= \frac{1}{6} x^6 - \frac{1}{2} x^2$. Подставляем:

$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{6} x^6 - \frac{1}{2} x^2 + C$. Умножим на 2:

$y^2 = \frac{1}{3} x^6 - x^2 + 2C$. Заменим постоянную C на $\frac{C}{2}$.

Ответ: $y^2 = \frac{1}{3} x^6 - x^2 + C$

N 5

$y = x$; $y = \sqrt{x+2}$; $x = 0$

Решение

Делаем чертеж. Проводим прямую $y = x$ через точки:

x	$y = x$
0	0
2	2

Проводим параболу $y = \sqrt{x+2}$ через точки:

x	$y = \sqrt{x+2}$
−2	0
−1	1
2	2
7	3

Прямая $x = 0$ - это ось ординат, y.
Прямая $y = x$ и парабола $y = \sqrt{x+2}$ пересекаются в точке $x = 2$; $y = 2$. Из построения видно, что фигура располагается при $0 \le x \le 2$. Она ограничена снизу прямой $y = x$ и сверху - параболой $y = \sqrt{x+2}$. Находим площадь:

$$S = \int_0^2 (\sqrt{x+2} - x)\,dx = \int_0^2 \sqrt{x+2}\,dx - \int_0^2 x\,dx$$

В первом интеграле сделаем замену $t = x+2$.

Тогда $dt = (x+2)'dx = ((x)' + (2)')dx = (1+0)dx = dx$.

При $x=0$; $t = 0+2 = 2$

При $x=2$; $t = 2+2 = 4$.

Интегрируем используя формулу $\int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$.

$$\int_0^2 \sqrt{x+2}\,dx = \int_2^4 t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot t^{\frac{1}{2}+1}\Big|_2^4 =$$

$$= \frac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}}\Big|_2^4 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(2^3 - \sqrt{2^3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(8 - \sqrt{2^2 \cdot 2}\right) = \frac{2}{3}\left(8 - 2\sqrt{2}\right) = \frac{4}{3}\left(4 - \sqrt{2}\right)$$

Второй интеграл:

$$\int_0^2 x\,dx = \int_0^2 x^1\,dx = \frac{1}{1+1} x^{1+1}\Big|_0^2 = \frac{1}{2} x^2\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(2^2 - 0^2\right) = 2$$

Окончательно имеем:

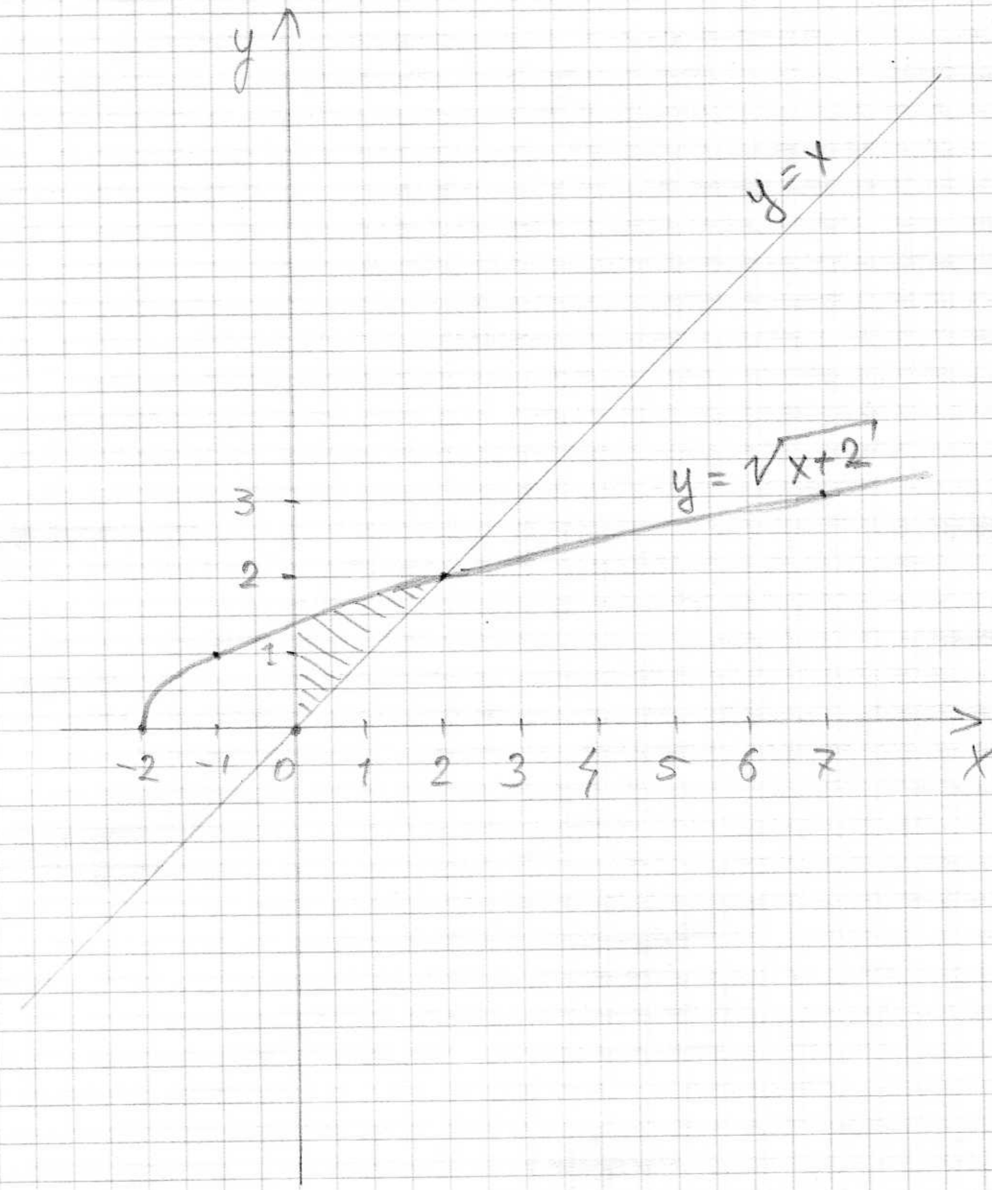
$$S = \frac{4}{3}\left(4 - \sqrt{2}\right) - 2 = \frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{6}{3} =$$

N5 (стр. 3)

$$= \frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{10-4\sqrt{2}}{3}$$

Ответ: $S = \dfrac{10-4\sqrt{2}}{3} \approx 1,448$

N 5



№6

x_i	0,5	2,0	2,4	3,0	3,8
y_i	5,0	3,0	2,5	2,1	2,0

Решение

Параметры а и в определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + в \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + в \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

где $n = 5$ - количество экспериментальных данных.

Вычисление сумм выполняем в таблице 1

Таблица 1

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	0,5	5,0	0,25	2,5
2	2	3,0	4	6
3	2,4	2,5	5,76	6
4	3	2,1	9	6,3
5	3,8	2,0	14,44	7,6
Итого:	**11,7**	**14,6**	**33,45**	**28,4**

Пример расчета первой строки:

$x_1 = 0,5$; $y_1 = 5,0$; $x_1^2 = 0,5^2 = 0,25$;

$x_1 \cdot y_1 = 0,5 \cdot 5,0 = 2,5$

Вычисляем итоги (сумму значений граф)

Подставляем в систему

$$\begin{cases} 33,45 \cdot a + 11,7 \cdot b = 28,4 \\ 11,7 \cdot a + 5b = 14,6 \end{cases}$$

Решаем методом Крамера. Определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 33,45 & 11,7 \\ 11,7 & 5 \end{vmatrix} = 33,45 \cdot 5 - 11,7 \cdot 11,7 = 30,36$$

$$a = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 28,4 & 11,7 \\ 14,6 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{30,36} \cdot (28,4 \cdot 5 - 11,7 \cdot 14,6) = -0,9493$$

$$b = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 33,45 & 28,4 \\ 11,7 & 14,6 \end{vmatrix} = \frac{1}{30,36} (33,45 \cdot 14,6 - 28,4 \cdot 11,7) = 5,141$$

Итак, линейная зависимость имеет вид:

$$y_л = -0,9493 \cdot X + 5,141$$

По этой формуле, для заданных значений X_i, рассчитываем значения $y_{лi}$ и квадраты отклонений $(y_{лi} - y_i)^2$ значений $y_{лi}$ от экспериментальных данных y_i. Тоже самое вычисляем с помощью выравнивающей функции

$$y_в = \frac{3}{x} + 1$$

Вычисление выполняем в таблице 2.

Таблица 2

№	x_i	y_i	$ул_i$	$(ул_i-y_i)^2$	$ув_i$	$(ув_i-y_i)^2$
1	0,5	5,0	4,667	0,1111	7,000	4,000
2	2	3,0	3,243	0,0589	2,500	0,250
3	2,4	2,5	2,863	0,1318	2,250	0,063
4	3	2,1	2,293	0,0374	2,000	0,010
6	3,8	2,0	1,534	0,2171	1,789	0,044
Итого:				**0,5564**		**4,367**

Пример расчета 1-ой строки:

$x_1 = 0{,}5;\ y_1 = 5{,}0;$

$$y_{л_1} = -0{,}9493 \cdot 0{,}5 + 5{,}141 = 4{,}667$$

$$(y_{л1} - y_1)^2 = (4{,}667 - 5)^2 = 0{,}1111$$

$$y_{в_1} = \frac{3}{0{,}5} + 1 = 7$$

$$(y_{в1} - y_1)^2 = (7 - 5)^2 = 4$$

Рассчитываем итоги. Поскольку

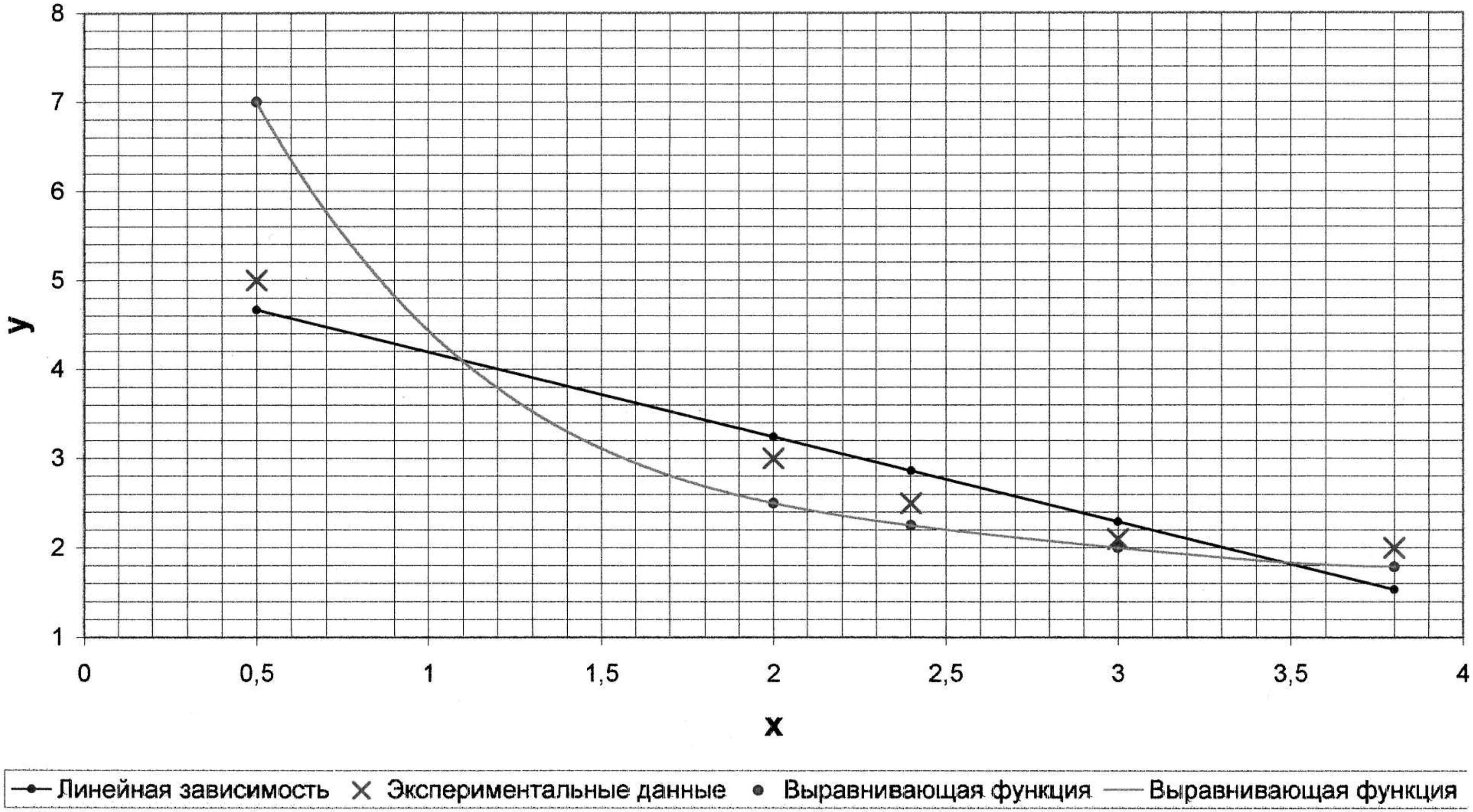
$$\sum_i (y_{л_i} - y_i)^2 = 0{,}5564 < \sum_i (y_{в_i} - y_i)^2 = 4{,}367,$$

то линейная зависимость лучше выравнивает экспериментальные данные. Делаем чертеж.

<u>Ответ:</u> $a = -0,9493$; $b = 5,141$.

Линейная зависимость лучше выравнивает экспериментальные данные.

Экспериментальные данные и выровненные значения



№ 7

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n+1}{3^n}$$

Решение

Исследуем на абсолютную сходимость с помощью признака Даламбера. Общий член ряда:

$$a_n = (-1)^n \frac{4n+1}{3^n}.$$ Его модуль:

$$|a_n| = \frac{4n+1}{3^n}.$$

$$|a_{n+1}| = \frac{4(n+1)+1}{3^{n+1}} = \frac{4n+5}{3 \cdot 3^n};$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(4n+5) \cdot 3^n}{3 \cdot 3^n \cdot (4n+1)} = \frac{1}{3} \frac{4n+5}{4n+1}.$$

Находим предел:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{4n+5}{4n+1} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n+5}{n}}{\frac{4n+1}{n}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{5}{n}}{4+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4+0}{4+0} = \frac{1}{3}$$

№7 (стр. 2)

Поскольку $q = \frac{1}{3} < 1$, то ряд сходится абсолютно.

Ответ: Ряд сходится абсолютно.